

Análisis Fractal y Algoritmos Genéticos aplicado a la Administración de Riesgos

Por Dr. Oscar Ugalde Hernández

Introducción

Mediante la aplicación de las metodologías del análisis fractal y de los algoritmos genéticos, el estudio del elemento de volatilidad y administración del riesgo han logrado alcanzado nuevas dimensiones. Estos nuevos métodos aplicados al análisis de los mercados financieros, han permitido mejorar los procesos de toma de decisiones, al asemejarlos lo más cercanamente posible, a los procesos naturales que nos rodean. Para cada una de estas dos técnicas, se estudia en qué consisten, el proceso para obtenerlas, ventajas y desventajas, al igual que su aplicabilidad en el tema de riesgos.

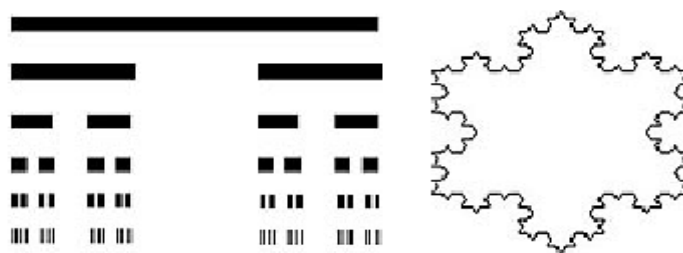
Análisis de Fractales

¿En qué consisten?

La 'Geometría Fractal' es conocida como la 'Geometría de la naturaleza'. La palabra 'fractal', inicialmente propuesta por Mandelbrot, se refiere a algo quebrado o roto (Martínez). Se asocia con las discontinuidades en las funciones matemáticas. Son algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos (fractaltech.org). Esto quiere decir, que el objeto fractal tiene "alguna" relación con el todo.

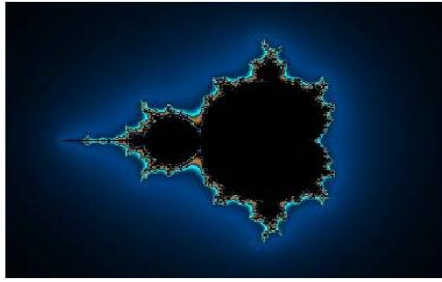
Los objetos fractales poseen dos características esenciales: Auto-similitud (que puede *perfecta* o *estadística*), y Dimensión fractal.

La auto-similitud perfecta es cuando cada porción de un objeto tiene exactamente ante las mismas características del objeto completo. A continuación se presenta un ejemplo de un objeto de auto-similitud perfecta:



Fuente: fractaltech.org

La auto-similitud estadística sucede cuando cada región de un objeto conserva, de manera estadísticamente semejante, sus características globales.



Fuente: fractaltech.org

La dimensión fractal o fraccionaria se caracteriza por ser topológica, y la de la Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

La dimensión topológica corresponde a propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Pueden dividirse en dimensión que es un punto, dimensión uno que es una línea recta, dimensión 2 que es un plano, y la dimensión tres que es el espacio. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch corresponde es representada por la siguiente expresión matemática:

$$S = L^D$$

donde **S** es la cantidad de segmentos o su longitud, **L** es la escala de dimensión, **D** es justamente la dimensión. Luego obtengo, $\log S = \log L^D$. Por propiedades de los logaritmos, se puede decir que: $\log S = D \cdot \log L$. Por último divido ambos miembros por $\log L$, y se obtiene: $D = \log S / \log L$. Esta relación aplica a los fractales de tipo lineal. Sin embargo, existen otros que son de tipo complejos y caóticos.

¿Que se requiere para obtener un fractal?

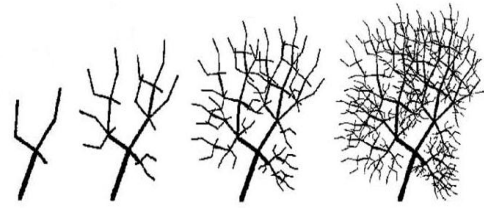
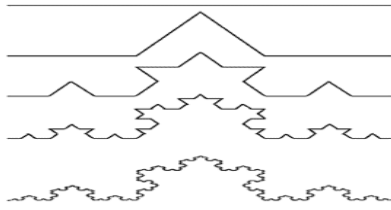
Se deben de seguir varios pasos para obtener un fractal:

1. Se escoge un imagen generadora. Se puede cualquiera, desde una recta hasta la cara un personaje de Disney World.
2. Se decide "el algoritmo de transformación de la imagen generadora" (Fractaltech.org).
3. Se repite el algoritmo infinitas veces, o con un límite determinado como variable en un software.

Algunos ejemplos de fractales se muestran a continuación:

Curva de von Koch

Modelo neuronal



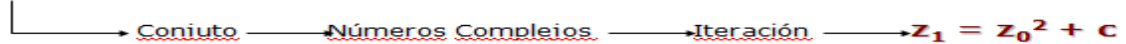
Fuente: fractaltech.org

Los Fractales complejos se desarrollan bajo la misma lógica, solo que en lugar de repetir una imagen infinitas veces, se repite una ecuación en el dominio de los números complejos. El ejemplo más utilizado en los medios académicos ha sido el Conjunto de Mandelbrot M , el cual consiste de todos aquellos valores (complejos) de c cuyas órbitas de 0 bajo $z^2 + c$ correspondientes no escapan al infinito. La ecuación utilizada es la siguiente:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

Para generar el Conjunto de Mandelbrot, se sigue la siguiente secuencia:

Generando el Conjunto de Mandelbrot (M-Set)

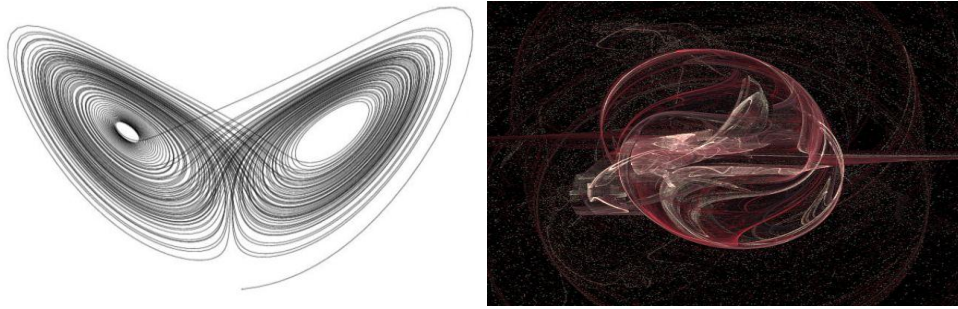


Iteraciones

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1^2 + c \\ Z_3 &= Z_2^2 + c \\ Z_4 &= Z_3^2 + c \\ Z_5 &= Z_4^2 + c \end{aligned}$$

Todos los Z y C son números complejos, Z_0 es el iniciador. La sucesión formada por $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ es denominada la órbita de Z_0 bajo la repetición $Z^2 + C$. Las órbitas pueden converger o divergir.

Los Fractales Caóticos, son los elementos geométricos de la Teoría del Caos (estudio de ciertos tipos de sistemas dinámicos de parte de la física, la matemática, entre otros, los cuales son muy sensibles a variaciones iniciales, pudiendo grandes diferencias en el comportamiento futuro), conocidos también como *Atractores*. Se generan a través de mediciones provenientes del mundo real, como Ecuaciones Diferenciales o Series de tiempo. Cuando uno modela un sistema natural caótico, tiene como finalidad encontrar un Atractor. A continuación se presentan ejemplo de fractales caóticos:



Fuente: fractaltech.org

Ventajas del análisis fractal

-Los objetos fractales, más allá de ser elementos matemáticos que requieren un alto grado de abstracción, permiten modelar de manera visualmente interesante gran cantidad de sistemas naturales.

-La dimensión fractal, que también parece ser una medida totalmente abstracta, ya que no es tan fácil generarse la idea de una dimensión fraccionaria teniendo como base nuestros conceptos tradicionales de dimensión euclídea, puede representar y darnos un parámetro de determinados sistemas con mucha más precisión y realidad de lo que lo hacen técnicas de análisis tradicionales.

-El Análisis Fractal se ha convertido en una potente herramienta de investigación para diferentes áreas de la Ciencia Aplicada, que van desde la Medicina, Biología, Sociología, Física, Economía hasta el Arte o la Arquitectura.

Desventajas del análisis fractal

-Los objetos fractales requieren una gran cantidad de datos para poder realizar las iteraciones correspondientes.

-Se requiere de un software especializado que requiere tanto de una alta inversión, así como de personal capacitado.

-Es un modelo de difícil implementación en organizaciones de tamaño pequeño o mediano en relación a las aplicaciones respectivas.

Aplicaciones en Riesgos

En el ensayo *Análisis de fluctuaciones financieras a partir de las series de tiempos* de Morales y Balankin, se realiza un análisis muy interesante de la aplicación de los fractales en la volatilidad de los precios del crudo WTI. En total serían 4,550 observaciones en la serie de tiempo.

Se analizan las propiedades estadísticas de las series de tiempo relacionadas a volatilidades históricas de precios (constantes a dólares de 1983) del crudo WTI, del periodo del 02 de Enero de 1986 al 31 de Diciembre del 2003.

Se procedió a desarrollar 300 escenarios de rendimientos logarítmicos “y se comparan con los pronósticos realizados por cinco compañías consultoras de PEMEX” (Morales y Balankin, p. 20). Estas

empresas utilizaron el método del Movimiento Browniano para realizar sus estimaciones. El estudio de Morales y Balankin compara sus resultados por el realizado por las cinco empresas consultoras de PEMEX. El hallazgo más importante al respecto es que los pronósticos de las consultoras tienden a la baja, mientras que los obtenidos por ellos vía Análisis Fractal, son ascendentes. En base a los resultados, el estudio concluye (en base a un escenario máximo de 60 dólares por barril para el 2006), que el Análisis Fractal, puede ser una herramienta cuantitativa más confiable para caracterizar el comportamiento de las fluctuaciones de los mercados financieros, ya que los considera sistemas complejos que despliegan "sistemas complejos que despliegan estructuras muy rugosas a diferentes escalas de tiempo-espacio" (Morales y Balankin, p. 20). Esto a su vez, permite generar pronósticos de precios, índices, tasas y tipos de cambio más precisos, los cuales ayudarían a los administradores de riesgos a desarrollar estrategias de cobertura más adecuadas.

Para obtener 100 series de tiempo de volatilidades históricas de los precios, $V_n(t)$, para diferentes horizontes de estudio $n= 1,2,3,\dots,100,101$: (figuras 10b-d, se utilizó la siguiente

ecuación: $V_n(t) = [\langle P^2(t) \rangle_n - \langle P(t) \rangle_n^2]^{1/2}$, donde t es el tiempo de negociación (días) y $(\dots)_n$ denota el promedio de una ventana de tamaño n .

Para iniciar, un análisis estadístico se desarrollo en las cien series de tiempo de la volatilidad histórica, con la intención de establecer cuál distribución se ajusta mejor a las mencionadas series de tiempo. Para lograrlo, se usó el software @Risk 4.5, con el objeto de estudiar situaciones sensibles al riesgo, usando las distribuciones estadísticas, empezando con las que mejor ajustan los datos, mediante el análisis de los estadísticos: Chi cuadrada, Anderson-Darling, y Kolgomorov-Smirnov.

A su vez, un análisis fractal se ejecutó para determinar el valor del exponente de Hurst o rugosidad (irregularidad), mediante la aplicación de cuatro métodos de trazado auto-afín: rango reescalado, rugosidad-longitud, variograma y ondoletas. Para ello se aplica el software Benoit 1.3.

En relación a la caracterización de las volatilidades históricas de los precios del petróleo WTI, se procedió a generare 300 curvas auto-afines de los escenarios de los rendimientos logarítmicos de precios; para esto también se empleo el software Benoit 1.3. Al obtener estas curvas, de manera aleatoria, se procedió a calcular los precios. Posteriormente, se realizó el paso final de predicción de los datos. A continuación, se muestran los pronósticos de los precios de petróleo WTI a partir de Diciembre del 2003.

Del grado de rugosidad (volatilidad de los precios del petróleo) que posee la serie de tiempos, se puede proceder a pronosticar no solo el grado de riesgo vía índice Hurst, sino también a pronosticar los precios hasta Setiembre del 2014.



Fuente: Morales y Balankin, 2007.

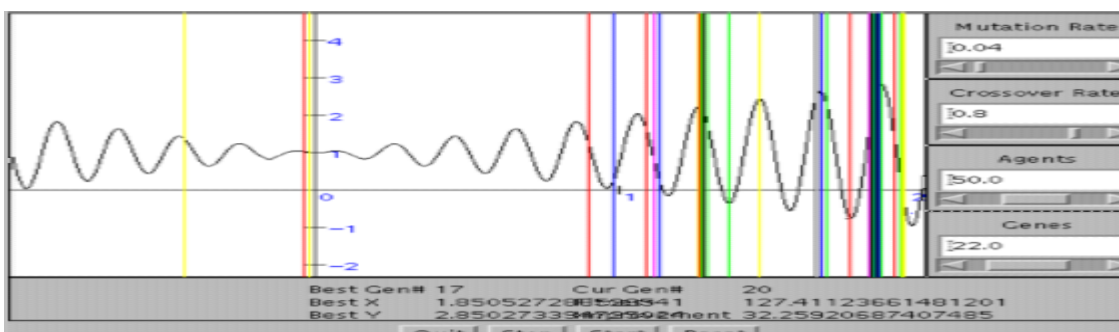
Algoritmos genéticos

¿En qué consisten?

Según John Holland en su libro *Adaptation in natural and artificial systems* (1975) “Los organismos vivientes son consumados resolvidores de problemas”.

Los algoritmos genéticos son métodos que se utilizan para encontrar solución a problemas de búsqueda y adaptación. Se fundamentan en el desarrollo genético de los seres en la naturaleza. La evolución se fundamenta en un proceso de selección natural y supervivencia de los más “adecuados”, según las ideas de Darwin. A través de las repeticiones infinitas, los algoritmos genéticos generan soluciones de encrucijadas del mundo real. Generalmente estas soluciones evolucionan hacia soluciones óptimas del problema sujeto a una adecuada codificación de las mismas.

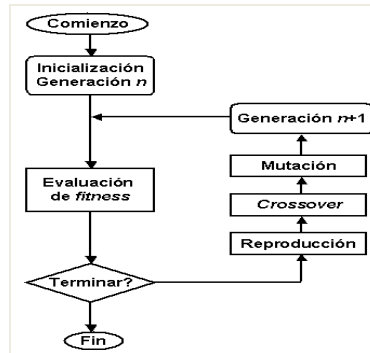
Existe una similitud muy cercana entre el comportamiento de la naturaleza y los algoritmos genéticos. Cada individuo en la población utilizada en el estudio, es una solución “factible” (Intelligent Solutions Group). Cada individuo adquiere una valoración, lijada a la bondad de la solución. Esto es análogo a la efectividad de un ser viviente para competir por recursos específicos. Si el individuo se adapta adecuadamente al problema, mayor es la probabilidad de que sea escogido para reproducirse, manteniendo su prevalencia genética. Como resultado se obtiene una nueva población de posibles soluciones, sustituyendo a la anterior y asegurando el mayor porcentaje de características adaptativas fuertes. Esto hace que las características adaptativas más fuertes, se esparzan a través de la población. En el caso de ser los algoritmos genéticos bien formulados, entonces la población converge hacia una solución óptima.



Fuente: <http://geneura.ugr.es/~jmerelo/ie/ags.htm>

¿Qué se requiere para aplicar un algoritmo genético?

Esto conlleva la ejecución de un ciclo compuesto de diferentes etapas. A continuación se presenta un esquema con el correspondiente ciclo:



Fuente: Reynoso, C. en: <http://www.carlosreynoso.com.ar/archivos/reynoso-algoritmo-genetico.ppt>

El ciclo está compuesto por los siguientes pasos:

1. Generar población
2. Evaluar adecuación
3. Los mejores se reproducen, los peores se extinguen
4. Aplicar mutaciones
5. Actualizar población
6. Volver a etapa 2

Ventajas de los algoritmos genéticos

- No es indispensable tener conocimientos sobre el problema que se pretende solucionar
- No funciona de manera secuencial como los métodos tradicionales, si no que funciona de una manera simultánea con soluciones diversas.
- Se sustentan en elementos fundamentados en probabilidad.
- Es muy fácil ejecutarlos gracias las arquitecturas paralelas modernas.
- Se aplican en instancias donde no existen técnicas especializadas. Aún si existieran estas técnicas, y sean adecuadas, se pueden realizar mejoras de las mismas desarrollándolas paralelamente con los Algoritmos Genéticos.
- Resultan menos afectados por los máximos locales (falsas soluciones) en función de la función objetivo.

Desventajas de los algoritmos genéticos

- Tardan en converger, o no lo hacen, sujeto a los parámetros usados.

-Convergen súbitamente a causa de una serie de problemas de índole diversa.

Aplicaciones en Riesgo

Una de las principales causas para el desarrollo de los algoritmos genéticos en tiempos recientes está asociado a la importancia de los mercados financieros mundiales. La selección de los portafolios de inversión multi-atributos con algoritmos genéticos.

La selección del modelo de portafolio de Markowitz solo facilita una solución a la colocación del capital entre activos pre-determinados. Sin embargo, en los mercados financieros, cientos de activos están disponibles para realizar inversiones. Sus calidades varían de muy buenos a extremadamente malos. Si estos activos no cuidadosamente escogidos por adelantado, entonces sería difícil obtener un portafolio de inversiones óptimo vía teoría de Markowitz. Por lo tanto, un pre-requisito es obtener un buen portafolio para seleccionar algunos activos de alta calidad, antes de aplicar el modelo media-varianza de Markowitz.

Con esto en mente, los atributos de activos múltiples son primero utilizados para evaluar la calidad del activo. Entonces, un esquema de análisis de portafolio multi-atributos de dos etapas permite utilizar dos algoritmos genéticos para desarrollar este tipo de análisis. En la primera etapa, un algoritmo genético es usado para evaluar la calidad de los activos con atributos múltiples, y se escogen algunos activos de alta calidad. En la segunda etapa, se usa otro algoritmo genético para optimizar la colocación del capital entre activos de alta calidad seleccionados.

La razón principal para seleccionar un algoritmo genético como el solucionador es que los usuarios pueden obtener una solución sub-óptimo, pero aceptable, vía el modelo de media-varianza de Markowitz, lo cual puede evitar las dificultades de técnicas de programación. Entonces, un portafolio viable puede ser construido mediante los algoritmos genéticos de optimización.

Conclusiones

La vida es un proceso de constante evolución que implica transformaciones ordenadas y no-ordenadas de los sistemas en donde se desarrolla. Esto parece trascender a los mercados financieros, donde se viven cambios a consecuencia de las decisiones humanas. En la búsqueda del más fuerte y de las soluciones óptimas, al igual que la forma en que la naturaleza actúa, hemos encontrado los métodos de análisis fractal y de algoritmos genéticos, que nos han permitido encontrar tanto las soluciones como el entendimiento de los comportamientos de los mercados financieros. Al aplicarlos a la realidad financiera del mundo, logramos entender mejor los fenómenos de la volatilidad y del riesgo al que se enfrentan.

Bibliografía

1. Nova, *Hunting the Hidden Dimension*(Video), Consultado el 25 de Julio del 2012 en <http://www.youtube.com>
2. Martínez, J., *La naturaleza de los fractales*, consultado el 25 de Julio del 2012 en: http://www.fractovia.org/art/es/what_es3.shtml
3. Aspectos teóricos de la geometría fractal, consultado el 25 de Julio del 2012 en: www.fractaltec.org/Intro-Fractales.ppt
4. Morales, O. y Balankin, A., *Análisis de Fluctuaciones financieras a partir de Series de Tiempo*, Boletín Técnico No. 17-2007, Comité técnico nacional de Administración Integral de Riesgos.
5. Intelligent Systems Group, *Algoritmos genéticos*, Consultado el día 25 de Julio del 2012 en: <http://www.sc.ehu.es/ccwbayes/docencia/mmcc/docs/temageneticos.pdf>
6. Lean, Yu, et al. (Febr. 2009) Multi-Attribute Portfolio Selection with Genetic Optimization Algorithms, Vol. 47, No. 1, pp. 23–30.
7. Reynoso, Carlos (), Presentación de powerpoint *Algoritmo genético*, Universidad de Buenos Aires, consultada el 25 de Julio del 2012 en: <http://www.carlosreynoso.com.ar/archivos/reynoso-algoritmo-genetico.ppt>